

abnehmen als  $m_F$ . Das ist nicht der Fall. Nach kleineren Winkeln hin steigt  $|m_P|$  an, mit größeren Winkeln geht  $I_F$  wenigstens annähernd so schnell nach Null wie  $I_P$ , im allgemeinen sogar weit schneller. Danach sind die Grenzkurven, an die sich horizontale Wendetangenten ziehen lassen, gegeben durch  $m_{F\max} + m_P = 0$ . Die Kurvenschar, die dieser Bedingung genügt, wurde berechnet; die dazugehörigen Parameterkombinationen  $(g, \varepsilon^2)$  bzw. für den dreidimensionalen Fall  $(g, \varepsilon^3)$  sind als Kurven in Abb. 9 dargestellt. Koordinatenpaare oberhalb der Kurven gehören zu Intensitätsverläufen, die ein Maximum aufweisen, die darunterliegenden gehören zu maximumlosen Streukurven. Als Faustregel gilt

für das Auftreten eines Flüssigkeitsringes:

$$\begin{array}{ll} \varepsilon^2 + 0,1 > g & \varepsilon^3 > g \\ \text{(II-dimensional)} & \text{(III-dimensional)} \end{array} \quad (43)$$

Diese Beziehungen werden durch die experimentellen Kurven (II, Abb. 6–9) gut bestätigt. Die dreidimensionale Beziehung hat bereits HOSMANN<sup>10</sup> auf Grund seiner Abschätzung als Kriterium dafür angegeben, daß sich sein Auswertverfahren nach reiner Partikelstreuung anwenden läßt. Bei der Besprechung der Auswertmöglichkeiten (II, § 5 d) wird sich herausstellen, daß mit Hilfe einer Korrektur fast immer eine Auswertung nach Partikelstreuung möglich ist, auch wenn  $\varepsilon^3 > g$  ist.

## Über die Bildfehler in doppelfokussierenden Massenspektrometern und Massenspektrographen

Von H. HINTENBERGER und L. A. KÖNIG

Aus dem Max-Planck-Institut für Chemie, Mainz

(Z. Naturforschg. 12 a, 140–147 [1957]; eingegangen am 10. Dezember 1956)

Unter Vernachlässigung der Wirkung der Streufelder werden die Koeffizienten der von  $\alpha_e^2$ ,  $\alpha_e \beta$  und  $\beta^2$  abhängigen Bildfehler  $B_{11}$ ,  $B_{12}$  und  $B_{22}$  für Apparate, die aus einem elektrischen Radialfeld und einem dahintergeschalteten homogenen Magnetfeld bestehen, berechnet und die Bedingungen für die Korrektur dieser Bildfehler angegeben. Insbesondere werden die Bedingungsgleichungen für vollständige Doppelfokussierung zweiter Ordnung für solche Instrumente abgeleitet. ( $\alpha_e$  = Öffnungswinkel,  $\beta = \Delta v/v_0$  = relative Geschwindigkeitsabweichung.)

Da sich durch Anwendung des Prinzips der Doppelfokussierung<sup>1</sup> sowohl eine Erhöhung des Auflösungsvermögens als auch eine Steigerung der Lichtstärke erzielen läßt, finden doppelfokussierende Instrumente in der Massenspektroskopie in steigendem Ausmaß Verwendung.

Über die Bildfehler in solchen Instrumenten liegen bereits einige Arbeiten vor. So hat CARTAN<sup>2</sup> nach einer eingehenden Untersuchung über die Bildfehler homogener magnetischer Sektorfelder bei senkrechtem Ein- und Austritt sowie bei beliebigem Eintritt und fast senkrechtem Austritt auch die Abbildungseigenschaften einiger Feldkombinationen mit einem Ablenkwinkel  $\varphi_e = \pi/\sqrt{2}$  im elektrischen

Feld und senkrechtem Austritt des Hauptstrahls aus dem magnetischen Feld untersucht. Außerdem liegt eine sehr eingehende Untersuchung von MARSHALL<sup>3</sup> über die Bildfehler in Massenspektrographen vor, bei denen das magnetische und das elektrische Feld sich am gleichen Ort überlagern und der Hauptstrahl ebenfalls senkrecht zu den Feldgrenzen ein- und austritt. Für senkrechten Ein- und Austritt ist der Öffnungsfehler für Apparate mit hintereinandergeschaltetem elektrischem und magnetischem Feld von JOHNSON und NIER<sup>4</sup> angegeben worden. Arbeiten über die Korrektur von Bildfehlern in doppelfokussierenden Instrumenten sind von CARTAN<sup>2</sup>, JOHNSON und NIER<sup>4</sup> und HINTENBERGER, WENDE und KÖNIG<sup>5, 6, 7</sup> publiziert worden.

<sup>1</sup> J. MATTAUCH u. R. HERZOG, Z. Phys. 89, 786 [1934].

<sup>2</sup> L. CARTAN, J. Phys. 8, 453 [1937].

<sup>3</sup> H. MARSHALL, Phys. Z. 45, 1 [1944].

<sup>4</sup> E. G. JOHNSON u. A. O. NIER, Phys. Rev. 91, 10 [1953].

<sup>5</sup> H. HINTENBERGER, Mass Spectroscopy in Phys. Research Nat. Bur. Stand. Circ. 522, S. 95 [1953].

<sup>6</sup> H. HINTENBERGER, H. WENDE u. L. A. KÖNIG, Z. Naturforschg. 10 a, 344 [1955].

<sup>7</sup> H. HINTENBERGER, H. WENDE u. L. A. KÖNIG, Z. Naturforschg. 10 a, 605 [1955]; 12 a, 88 [1957].



Im folgenden sollen die von  $\alpha_e^2$ ,  $\alpha_e \beta$  und  $\beta^2$  abhängigen Bildfehler für Teilchenbahnen, die in der Mittelebene verlaufen, in doppelfokussierenden Instrumenten berechnet werden, wobei  $\alpha_e$  der Öffnungswinkel des Strahlenbündels und  $\beta = \Delta v/v_0$  die relative Geschwindigkeitsabweichung der geladenen Teilchen mit der Masse  $m$  bedeuten. Der Einfluß der Streufelder wird in der Rechnung vernachlässigt, er kann aber bei der Dimensionierung der Felder zumindest teilweise berücksichtigt werden<sup>8</sup>. Ebenso wird die endliche Ausdehnung des Eintrittsschlitzes, die bei doppelfokussierenden Instrumenten stets sehr klein gemacht wird, vernachlässigt.

### 1. Elektrisches Radialfeld

Wir betrachten geladene Teilchen der Masse  $m$  und der Geschwindigkeit  $v = v_0(1 + \beta)$ , die vom Punkt  $P_1$  kommend unter dem Winkel  $\alpha_e$  gegen die Hauptbahn  $s_0$  geneigt in das Feld eines elektrischen Zylinderkondensators eintreten.  $r_e$  ist der Radius der Hauptbahn, die von Teilchen der Masse  $m$  und der Geschwindigkeit  $v_0$ , wenn  $\alpha_e = 0$  ist, im Zylinderkondensator durchlaufen wird. Zur Berechnung der Bildfehler ist es notwendig, die Bahnen bis zu Gliedern zweiter Ordnung der kleinen Größen  $\alpha_e$  und  $\beta$  zu bestimmen. Für das elektrische Radialfeld ist das

z. Tl. von JOHNSON und NIER<sup>4</sup> und dann vollständig von VOORHIES<sup>9</sup> durchgeführt worden\*. Wir haben unabhängig davon die Bahnen geladener Teilchen in elektrischen Radialfeldern ebenfalls berechnet\*\* und für den aus dem Feld austretenden

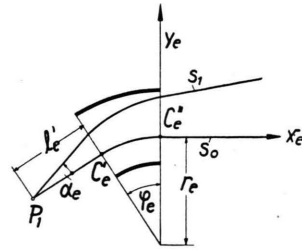


Abb. 1. Koordinatensystem zur Bahnberechnung des aus dem Zylinderkondensator austretenden Ionenstrahls ( $s_0$  = Mittelbahn, die von Teilchen der Geschwindigkeit  $v = v_0$  mit  $\alpha_e = 0$  durchlaufen wird;  $s_1$  = Nachbarbahn von Teilchen mit  $v = v_0(1 + \beta)$  und  $\alpha_e \neq 0$ ).

Strahl  $s_1$  in dem in Abb. 1 dargestellten Koordinatensystem die folgende Gleichung erhalten:

$$y_e = r_e \{ K_1 \alpha_e + K_2 \beta + K_{11} \alpha_e^2 + K_{12} \alpha_e \beta + K_{22} \beta^2 \} + x_e \{ L_1 \alpha_e + L_2 \beta + L_{11} \alpha_e^2 + L_{12} \alpha_e \beta + L_{22} \beta^2 \}. \quad (1)$$

Dabei stellen die Größen  $K$  und  $L$  Abkürzungen für die folgenden Ausdrücke dar:

$$\left. \begin{aligned} K_1 &= \kappa_{1a} + \kappa_{1b} \frac{l'_e}{r_e}, & \kappa_{1a} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \sqrt{2} \varphi_e, \\ K_2 &= \kappa_{2a}, & \kappa_{1b} &= \cos \sqrt{2} \varphi_e, \\ K_{11} &= \kappa_{11a} + \kappa_{11b} \frac{l'_e}{r_e} + \kappa_{11c} \left( \frac{l'_e}{r_e} \right)^2, & \kappa_{2a} &= 1 - \cos \sqrt{2} \varphi_e; \\ K_{12} &= \kappa_{12a} + \kappa_{12b} \frac{l'_e}{r_e}, & \kappa_{11a} &= -\frac{3}{8} + \frac{2}{3} \cos \sqrt{2} \varphi_e - \frac{7}{24} \cos 2 \sqrt{2} \varphi_e, \\ K_{22} &= \kappa_{22a}, & \kappa_{11b} &= -\left( \frac{4}{3\sqrt{2}} \sin \sqrt{2} \varphi_e - \frac{7}{6\sqrt{2}} \sin 2 \sqrt{2} \varphi_e \right), \\ & & \kappa_{11c} &= -\frac{3}{4} + \frac{1}{6} \cos \sqrt{2} \varphi_e + \frac{7}{12} \cos 2 \sqrt{2} \varphi_e, \\ & & \kappa_{12a} &= \frac{7}{3\sqrt{2}} \left( \sin \sqrt{2} \varphi_e - \frac{1}{2} \sin 2 \sqrt{2} \varphi_e \right), \\ & & \kappa_{12b} &= \frac{3}{2} - \frac{1}{3} \cos \sqrt{2} \varphi_e - \frac{7}{6} \cos 2 \sqrt{2} \varphi_e, \\ & & \kappa_{22a} &= \frac{1}{4} - \frac{5}{6} \cos \sqrt{2} \varphi_e + \frac{7}{12} \cos 2 \sqrt{2} \varphi_e; \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

<sup>8</sup> L. A. KÖNIG u. H. HINTENBERGER, Z. Naturforschg. **10 a**, 877 [1955] (siehe dort ausführlichere Literaturangaben).

<sup>9</sup> H. G. VOORHIES, Rev. Sci. Instrum. **26**, 716 [1955]; **27**, 58 [1956].

\* Für den Fall  $\varphi_e = \pi/\sqrt{2}$  haben schon HUGHES und ROJANSKY Bildfehler angegeben<sup>10</sup>.

<sup>10</sup> A. L. HUGHES u. V. ROJANSKY, Phys. Rev. **34**, 284 [1929].

\*\* Diese Rechnungen wurden von uns schon vor längerer Zeit durchgeführt, aber nicht publiziert. Es läßt sich zeigen, daß unser Resultat mit dem von VOORHIES übereinstimmt. Für die folgenden Rechnungen erscheint uns die hier gegebene Darstellungsform zweckmäßiger.

$$\begin{aligned}
 L_1 &= \lambda_{1a} + \lambda_{1b} \frac{l'_e}{r_e}, & \lambda_{1a} &= \cos \sqrt{2} \varphi_e, \\
 L_2 &= \lambda_{2a}, & \lambda_{1b} &= -\sqrt{2} \sin \sqrt{2} \varphi_e, \\
 L_{11} &= \lambda_{11a} + \lambda_{11b} \frac{l'_e}{r_e} + \lambda_{11c} \left( \frac{l'_e}{r_e} \right)^2, & \lambda_{2a} &= \sqrt{2} \sin \sqrt{2} \varphi_e; \\
 & & \lambda_{11a} &= -\frac{\sqrt{2}}{3} (2 \sin \sqrt{2} \varphi_e - \sin 2 \sqrt{2} \varphi_e), \\
 & & \lambda_{11b} &= -\frac{4}{3} (\cos \sqrt{2} \varphi_e - \cos 2 \sqrt{2} \varphi_e), \\
 & & \lambda_{11c} &= -\frac{\sqrt{2}}{6} (\sin \sqrt{2} \varphi_e + 4 \sin 2 \sqrt{2} \varphi_e), \\
 L_{12} &= \lambda_{12a} + \lambda_{12b} \frac{l'_e}{r_e}, & \lambda_{12a} &= \frac{4}{3} (\cos \sqrt{2} \varphi_e - \cos 2 \sqrt{2} \varphi_e), \\
 & & \lambda_{12b} &= \frac{4}{3} \sqrt{2} (\sin \sqrt{2} \varphi_e + \sin 2 \sqrt{2} \varphi_e), \\
 L_{22} &= \lambda_{22a}, & \lambda_{22a} &= -\frac{\sqrt{2}}{6} (\sin \sqrt{2} \varphi_e + 4 \sin 2 \sqrt{2} \varphi_e).
 \end{aligned} \tag{3}$$

## 2. Homogenes magnetisches Sektorfeld

In dem in Abb. 2 gegebenen Koordinatensystem  $x_m, y_m$  läßt sich die Bahn  $s_1$  für ein geladenes Teil-

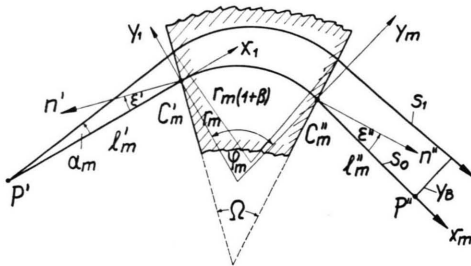


Abb. 2. Die Koordinatensysteme  $x_m, y_m$  und  $x_1, y_1$ , die zur Bahnberechnung für das homogene Sektorfeld benutzt werden ( $s_0$  = Mittelbahn, die von Teilchen der Geschwindigkeit  $v=v_0$  mit  $\alpha_m=0$  durchlaufen wird;  $s_1$  = Nachbarbahn von Teilchen mit  $v=v_0(1+\beta)$  und  $\alpha_m \neq 0$ ).  $\varepsilon'$  und  $\varepsilon''$  sind positiv, wenn die Normalen  $n'$  und  $n''$  auf der vom Ablenkungszentrum abgewandten Seite von  $s_0$  liegen.

chen der Masse  $m$  und der Geschwindigkeitsabweichung  $\beta$ , das von einem Punkt  $P'$  vor dem Feld unter dem Winkel  $\alpha_m$  gegen den Hauptstrahl  $s_0$  geneigt ausgeht, durch folgende Gleichung darstellen:

$$\begin{aligned}
 y_m &= r_m \{ M_1 \alpha_m + M_2 \beta + M_{11} \alpha_m^2 + M_{12} \alpha_m \beta + M_{22} \beta^2 \} \\
 &+ x_m \{ N_1 \alpha_m + N_2 \beta + N_{11} \alpha_m^2 + N_{12} \alpha_m \beta + N_{22} \beta^2 \}.
 \end{aligned} \tag{4}$$

Dabei bedeutet  $r_m$  den Krümmungsradius der Bahn des Hauptstrahls  $s_0$  im Magnetfeld, die von Teilchen der Masse  $m$  und der Geschwindigkeit  $v_0$  durchlaufen wird, wenn sie vom Punkt  $P'$  mit  $\alpha_m=0$  ausgehen. Die Größen  $M$  und  $N$  sind Funktionen des Ein- und Austrittswinkels  $\varepsilon'$  und  $\varepsilon''$ , des Ablenkungswinkels  $\varphi_m$  (siehe Abb. 2) und des Abstandes  $l'_m$  des Punktes  $P'$  vom Eintrittspunkt  $C'_m$  des Mittelstrahls ins Magnetfeld. Für geradlinig begrenzte Polschuhe erhält man für die Größen  $M$  und  $N$  bei beliebigen Ein- und Austrittswinkeln<sup>11</sup>:

$$\begin{aligned}
 M_1 &= \mu_{1a} + \mu_{1b} \frac{l'_m}{r_m}, & \mu_{1a} &= \sin \varphi_m, \\
 & & \mu_{1b} &= \frac{\cos(\varphi_m - \varepsilon')}{\cos \varepsilon'}, \\
 M_2 &= \mu_{2a}, & \mu_{2a} &= 1 - \cos \varphi_m;
 \end{aligned} \tag{5}$$

<sup>11</sup> H. HINTENBERGER u. L. A. KÖNIG, Z. Naturforschg. 11 a, 1039 [1956].

$$\begin{aligned}
 M_{11} &= \mu_{11a} + \mu_{11b} \frac{l'_m}{r_m} + \mu_{11c} \left( \frac{l'_m}{r_m} \right)^2, \\
 \mu_{11a} &= \frac{1}{2} [\cos \varphi_m (1 - \cos \varphi_m) + \operatorname{tg}^2 \varepsilon'' \sin^2 \varphi_m], \\
 \mu_{11b} &= \frac{\cos(\varphi_m - \varepsilon')}{\cos \varepsilon'} \left[ \operatorname{tg} \varepsilon' + \operatorname{tg} \varepsilon'' \frac{\cos(\varphi_m - \varepsilon'')}{\cos \varepsilon''} \right] \\
 &\quad + \cos \varphi_m \frac{\sin(\varphi_m - \varepsilon' - \varepsilon'')}{\cos \varepsilon' \cos \varepsilon''}, \\
 \mu_{11c} &= -\frac{1}{2} \frac{\sin(\varphi_m - \varepsilon' - \varepsilon'')}{\cos \varepsilon' \cos \varepsilon''} \left[ \frac{\sin(\varphi_m - \varepsilon' - \varepsilon'')}{\cos \varepsilon' \cos \varepsilon''} \right. \\
 &\quad \left. + 2 \operatorname{tg} \varepsilon'' \frac{\cos(\varphi_m - \varepsilon')}{\cos \varepsilon'} \right];
 \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
 M_{12} &= \mu_{12a} + \mu_{12b} \frac{l'_m}{r_m}, \\
 \mu_{12a} &= \sin \varphi_m \frac{1 - \cos \varphi_m}{\cos^2 \varepsilon''}, \\
 \mu_{12b} &= \operatorname{tg} \varepsilon'' \left[ \operatorname{tg} \varepsilon'' + \frac{\sin(\varphi_m - \varepsilon'')}{\cos \varepsilon''} \right] \frac{\cos(\varphi_m - \varepsilon')}{\cos \varepsilon'} \\
 &\quad + \sin \varphi_m \frac{\sin(\varphi_m - \varepsilon' - \varepsilon'')}{\cos \varepsilon' \cos \varepsilon''}; \\
 M_{22} &= \mu_{22a}, \\
 \mu_{22a} &= \operatorname{tg} \varepsilon'' \left[ \operatorname{tg} \varepsilon'' + \frac{\sin(\varphi_m - \varepsilon'')}{\cos \varepsilon''} \right] (1 - \cos \varphi_m) \\
 &\quad - \frac{1}{2} \left[ \operatorname{tg} \varepsilon'' + \frac{\sin(\varphi_m - \varepsilon'')}{\cos \varepsilon''} \right]^2.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \nu_{1a} + \nu_{1b} \frac{l'_m}{r_m}, \\
 \nu_{1a} &= \frac{\cos(\varphi_m - \varepsilon'')}{\cos \varepsilon''}, \\
 \nu_{1b} &= -\frac{\sin(\varphi_m - \varepsilon' - \varepsilon'')}{\cos \varepsilon' \cos \varepsilon''}, \\
 N_2 &= \nu_{2a}, \\
 \nu_{2a} &= \operatorname{tg} \varepsilon'' + \frac{\sin(\varphi_m - \varepsilon'')}{\cos \varepsilon''}; \\
 N_{11} &= \nu_{11a} + \nu_{11b} \frac{l'_m}{r_m} + \nu_{11c} \left( \frac{l'_m}{r_m} \right)^2, \\
 \nu_{11a} &= -\frac{1}{2} \left[ \frac{\sin(\varphi_m - \varepsilon'')}{\cos \varepsilon''} + \operatorname{tg} \varepsilon'' \frac{\cos^2(\varphi_m - \varepsilon'')}{\cos^2 \varepsilon''} \right], \\
 \nu_{11b} &= -\frac{\sin(\varphi_m - \varepsilon' - \varepsilon'')}{\cos \varepsilon' \cos \varepsilon''} \left[ \operatorname{tg} \varepsilon' - \operatorname{tg} \varepsilon'' \frac{\cos(\varphi_m - \varepsilon'')}{\cos \varepsilon''} \right], \\
 \nu_{11c} &= -\frac{1}{2} \operatorname{tg} \varepsilon'' \frac{\sin^2(\varphi_m - \varepsilon' - \varepsilon'')}{\cos^2 \varepsilon' \cos^2 \varepsilon''}; \\
 N_{12} &= \nu_{12a} + \nu_{12b} \frac{l'_m}{r_m}, \\
 \nu_{12a} &= -\frac{\cos(\varphi_m - \varepsilon'')}{\cos \varepsilon''} \left[ \operatorname{tg} \varepsilon'' + \frac{\sin(\varphi_m - \varepsilon'')}{\cos \varepsilon''} \right] \operatorname{tg} \varepsilon'', \\
 \nu_{12b} &= \frac{\sin(\varphi_m - \varepsilon' - \varepsilon'')}{\cos \varepsilon' \cos \varepsilon''} \left\{ 1 + \operatorname{tg} \varepsilon'' \left[ \operatorname{tg} \varepsilon'' + \frac{\sin(\varphi_m - \varepsilon'')}{\cos \varepsilon''} \right] \right\}; \\
 N_{22} &= \nu_{22a}, \\
 \nu_{22a} &= -\frac{1}{2} \operatorname{tg} \varepsilon'' \left[ \operatorname{tg} \varepsilon'' + \frac{\sin(\varphi_m - \varepsilon'')}{\cos \varepsilon''} \right]^2 \\
 &\quad - \left[ \operatorname{tg} \varepsilon'' + \frac{\sin(\varphi_m - \varepsilon'')}{\cos \varepsilon''} \right].
 \end{aligned} \tag{6}$$

Die entsprechenden Ausdrücke für Sektorfelder mit beliebig gekrümmten Feldgrenzen, für die bisher nur der Öffnungsfehler berechnet wurde<sup>8, 12</sup>, werden in einer eigenen Arbeit demnächst angegeben werden.

<sup>12</sup> H. HINTENBERGER, Z. Naturforsch. 6a, 275 [1951].

### 3. Strahlverlauf in zwei hintereinander geschalteten Feldern

Wir betrachten die Bahnen geladener Teilchen der Masse  $m$  und der Geschwindigkeit  $v = v_0(1 + \beta)$ , die von einem Punkt  $P_1$  vor dem elektrischen Ra-

dialfeld unter dem Winkel  $\alpha_e$  gegen den Hauptstrahl  $s_0$  ausgehen und die zuerst ein elektrisches und dann im Abstand  $d$  davon ein homogenes magnetisches Feld durchlaufen (Abb. 3 und 4). In den Koordinaten  $y_e, x_e$  zwischen den beiden Feldern wird der aus dem elektrischen Feld austretende Strahl durch Gl. (1) bestimmt. Er hat gegen die  $x_e$ -Achse den Neigungswinkel vom Betrag  $\alpha_m$  und schneidet sie im Abstand  $l'_e$  vom Austrittspunkt  $C'_e$ . Aus Gl. (1) folgt für  $\alpha_m$  und  $l'_e$ :

$$\alpha_m = \pm \{L_1 \alpha_e + L_2 \beta + L_{11} \alpha_e^2 + L_{12} \alpha_e \beta + L_{22} \beta^2\}. \quad (7)$$

(Das obere Vorzeichen gilt für gleichsinnige, das untere für gegensinnige Ablenkung.)

$$l'_e = -r_e \frac{K_1 \alpha_e + K_2 \beta + K_{11} \alpha_e^2 + K_{12} \alpha_e \beta + K_{22} \beta^2}{L_1 \alpha_e + L_2 \beta + L_{11} \alpha_e^2 + L_{12} \alpha_e \beta + L_{22} \beta^2}. \quad (8)$$

Für das im folgenden oft benötigte Produkt der

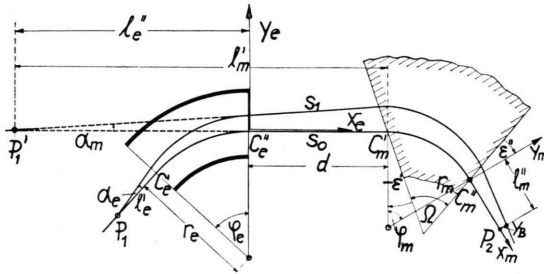


Abb. 3. Bahnverlauf (schematisch) bei gleichsinniger Ablenkung im elektrischen und magnetischen Feld. Die Lage des „Zwischenbildes“  $P_1'$  ist von  $\alpha_e$  und  $\beta$  abhängig ( $s_0$ =Mittelbahn, die von Teilchen der Geschwindigkeit  $v=v_0$  mit  $\alpha_e=0$  durchlaufen wird;  $s_1$ =Nachbarbahn von Teilchen mit  $v=v_0(1+\beta)$  und  $\alpha_e \neq 0$ ).

$$\begin{aligned} y_m = r_m \left[ \mu_{1a} \alpha_m + \mu_{1b} \left( \alpha_m \frac{l'_m}{r_m} \right) + \mu_{2a} \beta + \mu_{11a} \alpha_m^2 \right. \\ \left. + \mu_{11b} \left( \alpha_m \frac{l'_m}{r_m} \right) \alpha_m + \mu_{11c} \left( \alpha_m \frac{l'_m}{r_m} \right)^2 + \mu_{12a} \alpha_m \beta + \mu_{12b} \left( \alpha_m \frac{l'_m}{r_m} \right) \beta + \mu_{22a} \beta^2 \right] \\ + x_m \left[ \nu_{1a} \alpha_m + \nu_{1b} \left( \alpha_m \frac{l'_m}{r_m} \right) + \nu_{2a} \beta + \nu_{11a} \alpha_m^2 + \nu_{11b} \left( \alpha_m \frac{l'_m}{r_m} \right) \alpha_m \right. \\ \left. + \nu_{11c} \left( \alpha_m \frac{l'_m}{r_m} \right)^2 + \nu_{12a} \alpha_m \beta + \nu_{12b} \left( \alpha_m \frac{l'_m}{r_m} \right) \beta + \nu_{22a} \beta^2 \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

Für  $\alpha_m$  und  $\alpha_m \frac{l'_m}{r_m}$  sind die Ausdrücke einzusetzen, die sich aus den Gln. (1), (2) und (3) für den Nebenstrahl hinter dem elektrischen Feld ergeben.  $\alpha_m$  wurde bereits in Gl. (7) angegeben. Für

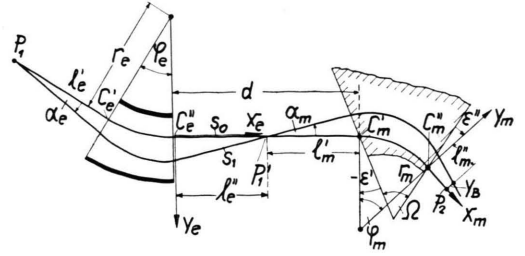


Abb. 4. Bahnverlauf (schematisch) bei gegensinniger Ablenkung im elektrischen und magnetischen Feld. Die Lage des „Zwischenbildes“  $P_1'$  ist von  $\alpha_e$  und  $\beta$  abhängig ( $s_0$ =Mittelbahn, die von Teilchen der Geschwindigkeit  $v=v_0$  mit  $\alpha_e=0$  durchlaufen wird;  $s_1$ =Nachbarbahn von Teilchen mit  $v=v_0(1+\beta)$  und  $\alpha_e \neq 0$ ).

beiden Größen erhält man

$$\alpha_m l'_e = \mp r_e \{K_1 \alpha_e + K_2 \beta + K_{11} \alpha_e^2 + K_{12} \alpha_e \beta + K_{22} \beta^2\}. \quad (9)$$

(Das obere Vorzeichen gilt für gleichsinnige, das untere für gegensinnige Ablenkung.)

Der Punkt  $P_1'$  (Abb. 3 und 4) kann als Ausgangspunkt des in das Magnetfeld eintretenden Strahles betrachtet werden. Er hat vom Eintrittspunkt  $C'_m$  in das Magnetfeld den Abstand  $l'_m$ , der gegeben ist durch

$$l'_m = d - l'_e. \quad (10)$$

Nach Durchlaufen des Magnetfeldes ist die Bahn des Nebenstrahles  $s_1$  eine Gerade, die im Koordinatensystem  $x_m, y_m$  (Abb. 3 und 4) durch die Gl. (4) gegeben ist, die mit Rücksicht auf Gl. (5) und (6) ausführlich geschrieben lautet:

$\alpha_m \frac{l'_m}{r_m}$  ergibt sich aus Gln. (7), (9) und (10)

$$\alpha_m \frac{l'_m}{r_m} = \pm \{T_1 \alpha_e + T_2 \beta + T_{11} \alpha_e^2 + T_{12} \alpha_e \beta + T_{22} \beta^2\} \quad (12)$$

mit

$$T_k = K_k \frac{r_e}{r_m} + L_k \frac{d}{r_m} \quad (k = 1, 2, 11, 12, 22). \quad (13)$$

Setzt man in Gl. (11)  $\alpha_m$  nach Gl. (7) und  $\alpha_m \frac{l'_m}{r_m}$

nach Gl. (12) ein, so erhält man für  $x_m = l'_m$  den Abstand  $y_B$ , in dem der Nebenstrahl auf einem

zum Hauptstrahl senkrechten und durch den Punkt  $x_m = l'_m$  der  $x_m$ -Achse gehenden Schirm auftrifft. Nach Zwischenrechnung ergibt sich:

$$y_B = r_m \{B_1 \alpha_e + B_2 \beta + B_{11} \alpha_e^2 + B_{12} \alpha_e \beta + B_{22} \beta^2\}, \quad (14)$$

wobei die Größen  $B$  Abkürzungen darstellen für die folgenden Ausdrücke:

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= \pm S_{1a} L_1 \pm S_{1b} T_1, \\ B_2 &= \pm S_{1a} L_2 \pm S_{1b} T_2 + S_{2a}, \\ B_{11} &= \pm S_{1a} L_{11} \pm S_{1b} T_{11} + S_{11a} L_1^2 + S_{11b} L_1 T_1 + S_{11c} T_1^2, \\ B_{12} &= \pm S_{1a} L_{12} \pm S_{1b} T_{12} + 2 S_{11a} L_1 L_2 + S_{11b} (L_1 T_2 + L_2 T_1) + 2 S_{11c} T_1 T_2 \pm S_{12a} L_1 \pm S_{12b} T_1, \\ B_{22} &= \pm S_{1a} L_{22} \pm S_{1b} T_{22} + S_{11a} L_2^2 + S_{11b} L_2 T_2 + S_{11c} T_2^2 \pm S_{12a} L_2 \pm S_{12b} T_2 + S_{22a}. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

(Das obere Vorzeichen gilt für gleichsinnige, das untere für gegensinnige Ablenkung.)

Die Größen  $T_k$  sind durch Gl. (13) gegeben und die Größen  $S_i$  stellen Abkürzungen für folgende Ausdrücke dar:

$$S_i = \mu_i + \nu_i \frac{l'_m}{r_m} \quad (16)$$

( $i = 1a, 1b, 2a, 11a, 11b, 11c, 12a, 12b, 22a$ ).

Wenn wir den Schirmabstand  $l'_m$  gleich der Bildentfernung von der Feldgrenze setzen, wird Richtungsfokussierung erster Ordnung erreicht und es ist  $B_1 = 0$ . Die übrigen Größen  $B$  haben folgende Bedeutung:

$B_2$  = Koeffizient der Geschwindigkeitsdispersion,

$B_{11}$  = Koeffizient des Öffnungsfehlers,

$B_{12}$  = Koeffizient der gemischt öfFnungswinkel- und geschwindigkeitsabhängigen Aberration,

$B_{22}$  = Koeffizient der rein geschwindigkeitsabhängigen Aberration.

Gl. (15) gilt für beliebige Zusammenstellungen elektrischer und magnetischer Felder, insbesondere auch für solche vom MATTAUCH-HERZOGschen Typ, bei denen die Strahlen für gleiches  $\beta$  zwischen elektrischem und magnetischem Feld in erster Näherung parallel laufen.

#### 4. Korrektur der Bildfehler

Wählt man die Variablen so, daß die Gleichungen

$$B_1 = 0, \quad B_2 = 0 \quad (17)$$

erfüllt sind, so erhält man Doppelfokussierung erster Ordnung. Macht man zusätzlich durch geeignete Wahl der Variablen

$$a) B_{11} = 0, \quad b) B_{12} = 0, \quad c) B_{22} = 0, \quad (18)$$

wobei die  $B_{ik}$  durch die Gln. (14) und (15) gegeben sind, so erzielt man eine Korrektur der Bildfehler, und zwar im Falle a) eine Korrektur des Öffnungsfehlers, im Falle b) eine Korrektur der gemischt  $\alpha_e \beta$ -abhängigen Aberration und im Falle c) eine Korrektur der geschwindigkeitsabhängigen Aberration. Damit vollständige Doppelfokussierung zweiter Ordnung erreicht wird, müssen alle drei der Gln. (18) gleichzeitig erfüllt sein.

Die Auswertung dieses Gleichungssystems erfordert umfangreiche numerische Rechnungen, über deren Ergebnis in einer späteren Arbeit berichtet werden wird.

Für Apparate mit gerader Bildkurve und Doppelfokussierung erster Ordnung für alle Massen wurde ein den Gln. (17) äquivalentes Gleichungssystem bereits früher abgeleitet und ausgewertet<sup>6,7</sup>. Es ergab sich dabei, daß sowohl für gleich- als auch für gegensinnige Ablenkung im elektrischen und magnetischen Feld für bestimmte Bereiche der Ablenkwinkel  $\varphi_e$  und  $\varphi_m$  durch geeignete Wahl der Bahnradien  $r_e$  und  $r_m$  Richtungsfokussierung zweiter Ordnung für eine Masse zusätzlich erreicht werden kann ( $B_{11} = 0$ ). Für kleine Ablenkwinkel  $\varphi_e$  kann darüber hinaus durch geeignete Wahl des Abstandes  $d$  der beiden Felder auch noch die Korrektur der rein geschwindigkeitsabhängigen Aberration erzielt werden ( $B_{22} = 0$ ). Es ist dagegen nicht möglich, gleichzeitig den Öffnungsfehler ( $B_{11}$ ) und die gemischte



Aberration ( $B_{12}$ ) zu korrigieren. Damit ist es erst recht unmöglich, in Apparaten mit gerader Bildkurve und Doppelfokussierung erster Ordnung alle drei Bildfehler ( $B_{11}$ ,  $B_{12}$  und  $B_{22}$ ) gleichzeitig zu korrigieren und so Doppelfokussierung zweiter Ordnung zu erreichen\*.

### 5. Eine andere Darstellung der Bildfehler

Die Bedingungen (18) kann man auch in einer anderen Form angeben, in der wir die Ergebnisse einer frü-

heren Untersuchung über Doppelfokussierung zweiter Ordnung bei Massenspektrographen mit gerader Bildkurve dargestellt haben<sup>7</sup>. Um die Gleichheit der beiden Formen zu beweisen, hat man die Größen  $S_i$  ( $i = 1a, 1b, 2a, 11a, 11b, 11c, 12a, 12b, 22a$ ) der Gl. (16) durch die Größen  $M'_k$  und  $N'_k$  ( $k = 1, 2, 11, 12, 22$ ) auszudrücken, die aus den  $M_k$  und  $N_k$  der Gln. (5) u. (6) durch Vertauschen der Indizes ' und '', welche die Eintritts- und Austrittsseite kennzeichnen, entstehen. Hierzu benutzt man die 5 Beziehungen

$$\left. \begin{aligned} \text{a)} \quad & -S_{1a} N'_1 + S_{1b} M'_1 = 0, \\ \text{b)} \quad & -S_{1a} N'_2 + S_{1b} M'_2 + S_{2a} = 0, \\ \text{c)} \quad & -S_{1a} N'_{11} + S_{1b} M'_{11} + S_{11a} N_1'^2 - S_{11b} M'_1 N'_1 + S_{11c} M_1'^2 = 0, \\ \text{d)} \quad & -S_{1a} N'_{12} + S_{1b} M'_{12} + 2 S_{11a} N'_1 N'_2 - S_{11b} (N'_1 M'_2 + M'_1 N'_2) \\ & \quad + 2 S_{11c} M'_1 M'_2 - S_{12a} N'_1 + S_{12b} M'_1 = 0, \\ \text{e)} \quad & -S_{1a} N'_{22} + S_{1b} M'_{22} + S_{11a} N_2'^2 - S_{11b} M'_2 N'_2 + S_{11c} M_2'^2 - S_{12a} N'_2 + S_{12b} M'_2 + S_{22a} = 0, \end{aligned} \right\} (19)$$

die man durch Darstellung des gleichen Nebenstrahles in den zwei verschiedenen Koordinatensystemen  $x_1, y_1$  und  $x_m, y_m$  erhält (siehe Abb. 2). Es sind hierbei die Fälle  $N'_1 \neq 0$  und  $N'_1 = 0$  (MATTACH-HERZOGSCHER Apparatetyp) zu unterscheiden.

Im Falle  $N'_1 \neq 0$  erhält man unter Beachtung von  $S_{1a} = M'_1$  für die Glieder erster Ordnung in Gl. (14) aus den Gln. (15) und (19) die Bedingungen

$$\left. \begin{aligned} \text{a)} \quad & B_1 = \pm \left[ M'_1 L_1 + N'_1 \left( \frac{r_e}{r_m} K_1 + \frac{d}{r_m} L_1 \right) \right], \\ \text{b)} \quad & B_2 = M'_1 (N'_2 \pm L_2) - M'_2 N'_1 \pm N'_1 \left( \frac{r_e}{r_m} K_2 + \frac{d}{r_m} L_2 \right) \end{aligned} \right\} (20)$$

und unter der Voraussetzung  $B_1 = B_2 = 0$  für die Koeffizienten der Bildfehler die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} \text{c)} \quad & B_{11} = \pm M'_1 L_{11} + \frac{L_1^2}{N_1'^2} (M'_1 N'_{11} - M'_{11} N'_1) \pm N'_1 \left( \frac{r_e}{r_m} K_{11} + \frac{d}{r_m} L_{11} \right), \\ \text{d)} \quad & B_{12} = \pm M'_1 L_{12} \mp \frac{L_1}{N'_1} (M'_1 N'_{12} - M'_{12} N'_1) \pm \frac{2L_1}{N_1'^2} (M'_1 N'_{11} - M'_{11} N'_1) (N'_2 \pm L_2) \\ & \quad \pm N'_1 \left( \frac{r_e}{r_m} K_{12} + \frac{d}{r_m} L_{12} \right), \\ \text{e)} \quad & B_{22} = \pm M'_1 L_{22} + M'_1 N'_{22} - M'_{22} N'_1 - \frac{1}{N'_1} (M'_1 N'_{12} - M'_{12} N'_1) (N'_2 \pm L_2) \\ & \quad + \frac{1}{N_1'^2} (M'_1 N'_{11} - M'_{11} N'_1) (N'_2 \pm L_2)^2 \pm N'_1 \left( \frac{r_e}{r_m} K_{22} + \frac{d}{r_m} L_{22} \right). \end{aligned} \right\} (20)$$

\* Im Falle gleichsinniger Ablenkung ist es formal möglich,  $B_{11}$ ,  $B_{12}$  und  $B_{22}$  gleichzeitig zum Verschwinden zu bringen. Ein inzwischen berichteter Vorzeichenfehler, der uns beim Übergang von einer Darstellungsform zu einer ande-

ren im Falle gleichsinniger Ablenkung unterlaufen ist, täuschte die physikalische Brauchbarkeit solcher Lösungen vor<sup>7</sup>.

Die Bedingungen für Doppelfokussierung zweiter Ordnung  $B_{11} = B_{12} = B_{22} = 0$ , die man durch Nullsetzen der  $B_{ik}$  in der Form (20 c, d, e) erhält, sind mit jenen identisch, die sich bei Anwendung der in der früheren Arbeit verwendeten Methode ergeben. Dies ist von uns nachgeprüft worden.

Im Fall  $N'_1 = 0$  lauten hingegen die den Gln. (20) entsprechenden Ausdrücke für die Glieder erster Ordnung

$$\text{a) } B_1 = \pm M'_1 L_1, \quad \text{b) } B_2 = M'_1 (N'_2 \pm L_2)$$

und unter der Voraussetzung  $B_1 = B_2 = 0$  für die Glieder zweiter Ordnung

$$\left. \begin{aligned} \text{c) } B_{11} &= M'_1 \left[ \pm L_{11} + \left( \frac{r_e}{r_m} \right)^2 \frac{K_1^2}{M_1'^2} N_{11}' \right], \\ \text{d) } B_{12} &= M'_1 \left[ \pm L_{12} + 2 \frac{N_{11}'}{M_1'^2} K_1 \frac{r_e}{r_m} \left( \frac{r_e}{r_m} K_2 + \frac{d}{r_m} L_2 \mp M_2' \right) \pm \frac{r_e}{r_m} \frac{K_1}{M_1'} N_{12}' \right], \\ \text{e) } B_{22} &= M'_1 \left[ \pm L_{22} + N_{22}' + \frac{N_{11}'}{M_1'^2} \left( \frac{r_e}{r_m} K_2 + \frac{d}{r_m} L_2 \mp M_2' \right)^2 + \frac{N_{12}'}{M_1'} \left( \pm \frac{r_e}{r_m} K_2 \pm \frac{d}{r_m} L_2 - M_2' \right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Nullsetzen der Ausdrücke (21 c, d, e) ergibt die bereits in einer früheren Arbeit<sup>7</sup> angegebenen Bedingungen für das Verschwinden der Bildfehler. Wie man sofort sieht, besteht zwischen den in den Gln. (16 a, b, c) der genannten Arbeit angegebenen Größen  $A_{ik}$  und den Größen  $B_{ik}$  aus den Gln. (21 c, d, e) dieser Arbeit die Beziehungen  $B_{ik} = M'_1 A_{ik}$ , so daß wegen  $M'_1 \neq 0$  die Bedingungen  $B_{ik} = 0$  mit den Bedingungen  $A_{ik} = 0$  äquivalent sind.

## 6. Schlußbemerkung

Die vorstehend wiedergegebenen Rechnungen lassen sich leicht auf hintereinandergeschaltete kompliziertere Felder erweitern. Um z. B. die Bildfehler

für einen Apparat mit gekrümmten Magnetfeldgrenzen zu berechnen, hat man statt der Größen  $M$  und  $N$ , die in dieser Arbeit für geradlinig begrenzte Felder angegeben wurden, die entsprechenden Größen für das neue Feld zu berechnen und in die vorstehenden Gleichungen einzusetzen. Analog müßten auch statt der Größen  $K$  und  $L$ , die in dieser Arbeit für das Feld eines Zylinderkondensators angegeben sind, bei Verwendung eines anderen elektrischen Ablenkfeldes die entsprechenden anderen Ausdrücke eingesetzt werden. Allgemein kann man sagen, daß die hier abgeleiteten Formeln für die Bildfehler auf Apparate anwendbar sind, in denen Felder benutzt werden, nach deren Durchlaufen für den abgelenkten Strahl ein Ansatz von der Form der Gl. (1) bzw. (4) zulässig ist.